

# Математический анализ.

## Тема 6. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

### §1. Производная функции. Дифференцируемость функций

**Определение 1.** *Производной функции*  
 $y = f(x)$  называется предел отношения  
приращения функции к приращению  
аргумента при стремлении приращения  
аргумента к нулю:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Обозначения:  $y', \frac{dy}{dx}, f'(x)$

**Определение 2.** Функция  $y = f(x)$ ,  
имеющая в точке  $x_0$  производную,  
называется *дифференцируемой в  
этой точке.*

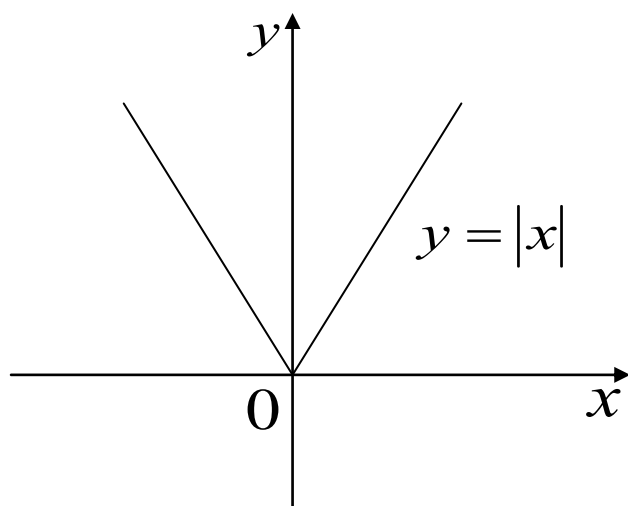
**Определение 3.** Функция  $y = f(x)$ , дифференцируемая в каждой точке интервала  $(a;b)$ , дифференцируема на этом интервале.

*Связь непрерывности и дифференцируемости функции.*

**Теорема.** Если функция  $y = f(x)$  дифференцируема в некоторой точке  $x_0$ , то в этой точке она и непрерывна. Обратное утверждение неверно, т.к. есть функции непрерывные, но не имеющие производной в какой-то точке.

**Пример:**

Функция  $y = |x|$  в точке  $x = 0$  непрерывна, но не имеет производной.



## Таблица основных производных

$$1. (c)' = 0$$

$$2. (x)' = 1$$

$$3. (u + v - z)' = u' + v' - z'$$

$$4. (u \cdot v)' = u'v + uv'$$

$$5. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$6. \left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}$$

$$7. \left(\frac{v}{c}\right)' = \frac{1}{c} \cdot v'$$

$$8. (cv)' = c \cdot v'$$

$$9. (u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$$

$$10. (e^u)' = e^u \cdot u'$$

$$11. (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$15. (\sin u)' = \cos u \cdot u'$$

$$16. (\cos u)' = -\sin u \cdot u'$$

$$17. (\operatorname{tg} u)' = \sec^2 u \cdot u'$$

$$18. (\operatorname{ctg} u)' = -\operatorname{cosec}^2 u \cdot u'$$

$$19. (\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$20. (\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$21. (\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$22. (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$$

$$23. (\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$24. (\operatorname{cosec} u)' = -\operatorname{cosec} u \cdot \operatorname{ctg} u \cdot u'$$

$$25. (u^v)' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'$$

$$12. (a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$$

$$13. (\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$14. (\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$$

## §2. Производная сложной и обратной функции

### 1. производная сложной функции

Если  $y = f(u)$  и  $u = \varphi(x)$ , то  $y = f(\varphi(x))$  - сложная функция от  $x$ , где

$u$  - промежуточный аргумент,

$x$  - конечный аргумент.

**Теорема.** Производная сложной функции равна производной функции по промежуточному аргументу  $u$  умноженной на производную промежуточного аргумента по конечному аргументу  $x$ , т.е.

$$\boxed{y_x' = y_u' \cdot u_x'} \text{ или } \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

**Пример.**

$$(\sin U)' = \cos U \cdot U'$$

$$(\sin 3x)' = \cos 3x \cdot (3x)'$$

## 2. производная обратной функции

Пусть  $y = f(x)$  дифференцируемая и строго монотонная функция на некотором промежутке  $x$ . Тогда функция  $x = \varphi(y)$  - ей обратная функция.

**Теорема.** Производная обратной функции равна:

$$\boxed{x_y' = \frac{1}{y_x'}}$$

## §3. Производные высших порядков

Пусть задана некоторая дифференцируемая функция  $y = f(x)$ . Тогда:

1)  $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$  - производная 1-го порядка.

Если  $f'(x)$  - это опять функция от  $x$ , то от нее можно найти производную:

$$2) \quad y'' = f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2} \text{ - производная 2-го порядка.}$$

$$3) \quad y''' = f'''(x) = \frac{d^3 y}{dx^3} \text{ - производная 3-го порядка.}$$

.....

$$n) \quad y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} \text{ - производная n-го порядка.}$$

**Пример:**  $y = x^4 - 2x + 5$  ,  $y''' = ?$

$$y' = 4x^3 - 2$$

$$y'' = 12x^2$$

$$y''' = 24x$$

## §4. Дифференцирование неявных функций

$F(x; y) = 0$  - функция, заданная неявно, т.е. функция не разрешена относительно  $y$ .

Чтобы найти производную неявной функции, следует все члены выражения

$F(x; y) = 0$  продифференцировать по  $x$ , а затем выразить  $y'$  через  $x$ ;  $y$  и  $const$ , помня, что  $x_x' = 1$ , а  $y_x' = y'$ .

**Пример:**

$$x^3 + y^3 + 5x^2y + xy - 5x + 6y + 8 = 0 \quad ; \quad y' = ?$$

$$(x^3)' + (y^3)' + (5x^2y)' + (xy)' - (5x)' + (6y)' + (8)' = 0$$

$$3x^2 + 3y^2 \cdot y' + 5(2x \cdot y + x^2 \cdot y') + x' \cdot y + x \cdot y' - 5 + 6y' = 0$$

$$3x^2 + \underline{3y^2 \cdot y'} + 10xy + \underline{5x^2 y'} + y + \underline{x \cdot y'} - 5 + \underline{6y'} = 0$$

$$y'(3y^2 + 5x^2 + x + 6) = -3x^2 - 10xy - y + 5$$

$$y' = \frac{5 - 3x^2 - 10xy - y}{3y^2 + 5x^2 + x + 6}$$

Аналогично можно находить производную 2-го порядка ( $y''$ ). Для этого выражение (1) нужно еще раз продифференцировать по  $x$  и выразить  $y''$  через  $x$ ;  $y$ ;  $y'$  и  $const$ . Затем в полученное выражение подставить значение  $y'$ .

## §5.Понятие дифференциала

Пусть дана функция  $y = f(x)$ . По определению:  $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ . По теореме о пределах имеем: если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$ , то

$$f(x) = b + \alpha \quad - \quad \text{значит} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha(x) \quad | \cdot \Delta x,$$

получим:  $\Delta y = y' \cdot \Delta x + \alpha(x) \cdot \Delta x$ .

**Определение 1.** Главная часть приращения  $y' \cdot \Delta x$ , линейная относительно  $\Delta x$ , называется *дифференциалом функции* и обозначается  $dy$ :

$$\boxed{dy = y' \cdot \Delta x}.$$

$$\boxed{\Delta y \approx dy}.$$

Рассмотрим функцию  $y = x$ .  $\boxed{dx = \Delta x}$ . Следовательно, формула дифференциала функции в конечном результате имеет вид:

$$\boxed{dy = y' \cdot dx}.$$

**Пример:**

$$y = \cos 5x$$

$$y' = -5 \sin 5x$$

$$dy = -5 \sin 5x \cdot dx$$



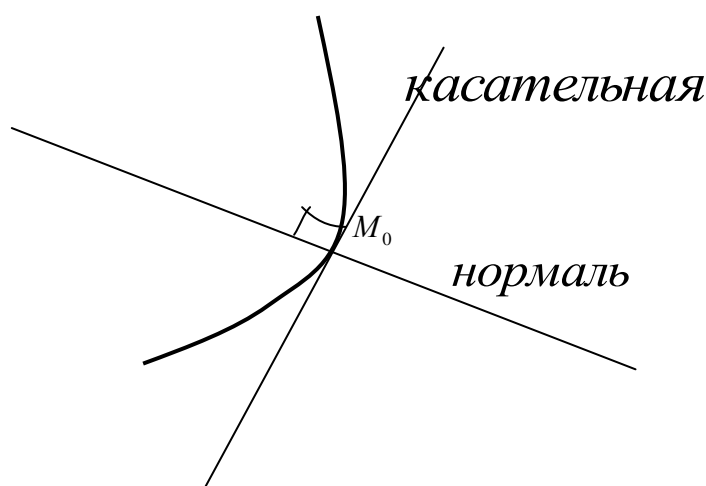
С геометрической точки зрения дифференциал функции  $y = f(x)$  равен приращению ординаты касательной.

## §6. Приложения производной функции

### 6.1 Геометрический смысл производной

Значение производной функции в точке равно тангенсу угла наклона касательной, проведенной к графику функции в этой точке:

$$y' = \operatorname{tg} \alpha$$



**Уравнение касательной:**

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$$

**Уравнение нормали:**

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0), \text{ где } (x_0, y_0) -$$

**точка касания.**

Производная — это мгновенная скорость изменения функции

## 6.2 Применение производной к исследованию функций

### 6.2.1 Возрастание и убывание функции

#### 1. Необходимое условие.

**Определение 1.** Если дифференцируемая на интервале  $(a; b)$  функция  $y = f(x)$  **возрастает**, то ее производная  $y'$  остается неотрицательной на этом интервале:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$$

**Определение 2.** Если дифференцируемая на интервале  $(a;b)$  функция  $y = f(x)$  **убывает**, то ее производная остается не положительной:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$$

## **2. Достаточное условие.**

**Определение 3.** Если функция на интервале  $(a;b)$  в каждой точке имеет положительную производную, то функция на этом интервале **возрастает**.

**Определение 4.** Если функция в каждой внутренней точке интервала  $(a;b)$  имеет отрицательную производную, то функция **убывает** на этом интервале.

## **6.2.2 Экстремумы функции**

**Определение 1.** Точки, в которых производная данной функции равна нулю или не существует, называются **критическими**.

## Первый достаточный признак существования экстремума

**Определение 1.** Если непрерывная функция  $y = f(x)$  имеет производную во всех внутренних точках интервала  $(a; b)$ , содержащем критическую точку  $x_0$ , и при переходе слева направо через критическую точку производная меняет знак, то в этой точке существует *экстремум*:

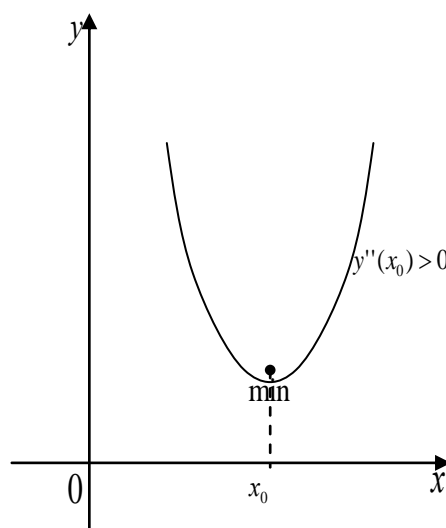
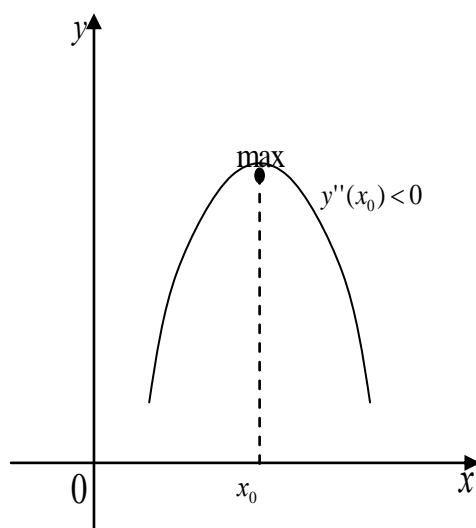
- 1). Если знак меняется с (+) на (-), то в этой точке max.
- 2). Если знак меняется с (-) на (+), то в этой точке min.

## Второй достаточный признак существования экстремума

**Определение 1.** Если в точке  $x_0$  производная равна нулю ( $y'(x_0) = 0$ ),  $y''$  - существует и не равна нулю, то, если:

$y''(x_0) < 0$  - то функция имеет max;

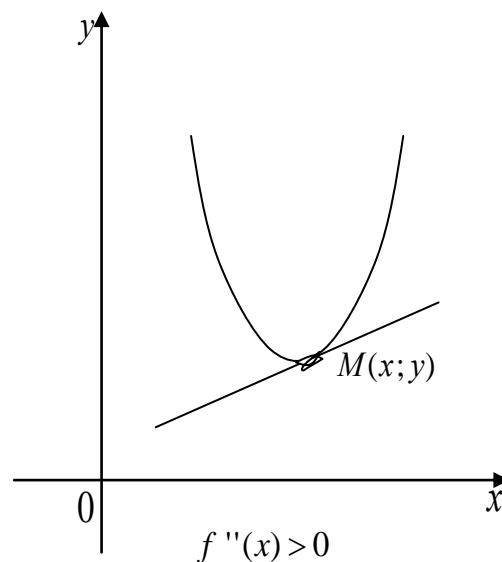
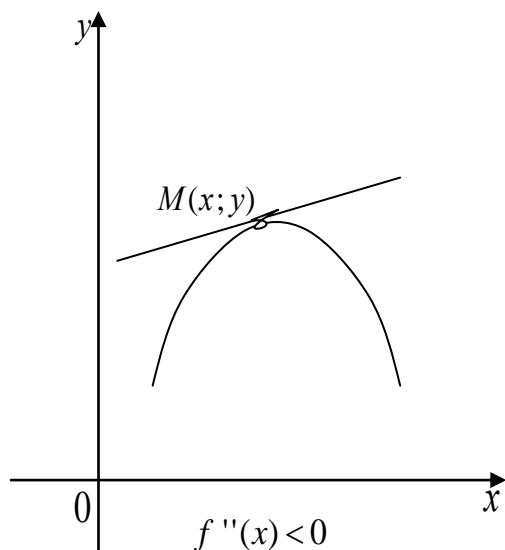
$y''(x_0) > 0$  - то функция имеет min.



### Замечание.

Если  $y''$  в критической точке обращается в ноль или не существует, вторым достаточным признаком пользоваться нельзя и следует перейти к 1-му достаточному признаку.

## 6.2.3 Выпуклость и вогнутость графика функции



**Определение 1.** График дифференцируемой функции  $y = f(x)$  называется **выпуклым**, если он расположен **ниже** любой своей касательной.

**Определение 2.** График дифференцируемой функции  $y = f(x)$  называется **вогнутым**, если он расположен **выше** любой своей касательной.

Достаточный признак выпуклости (вогнутости) графика функции.

**Определение 3.** Если для дважды дифференцированной функции  $y = f(x)$  на интервале  $(a; b)$ :

а)  $f''(x) < 0$  во всех точках интервала, то график функции **выпуклый** на этом интервале;

б)  $f''(x) > 0$  - то график **вогнутый**.

**Определение 4.** Точки графика непрерывной функции  $y = f(x)$ , отделяющие выпуклую часть от вогнутой, называют **точками перегиба**.

Пусть в некоторой точке  $x_0$  функция  $y = f(x)$  непрерывна и, если при переходе через точку  $x_0$   $y''$  меняет знак, то график функции в точке  $x_0$  имеет точку перегиба.

**Необходимое условие существования точки перегиба.**

Точки перегиба следует искать только среди таких, в которых вторая производная обращается в ноль или не существует.

### 6.2.4 Асимптоты графика функции

**Определение 1.** Прямая называется **асимптотой** для кривой, если расстояние от текущей точки  $M$  этой

кривой до прямой стремится к нулю, при неограниченном удалении точки  $M$  от начала координат.

Асимптоты бывают:

- 1) вертикальные;
- 2) наклонные;
- 3) горизонтальные.

1. Наклонные асимптоты (их не более двух).

Уравнения наклонных асимптот ищут в виде

$$y = kx + b,$$

где  $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x}; \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx).$

2. Если  $k = 0 \Rightarrow y = b$  - горизонтальная асимптота

3. Вертикальные асимптоты.

Если функция  $y = f(x)$  имеет точки разрыва, то график этой функции имеет вертикальные асимптоты.

**Определение 2.** Прямая  $x = a$  ( $\ell \parallel OY$ ) является **вертикальной асимптотой** графика функции  $y = f(x)$ , если



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

**Пример.** Найти асимптоты графика функции  
 $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}.$

Прямая  $x = -2$  является вертикальной асимптотой кривой.

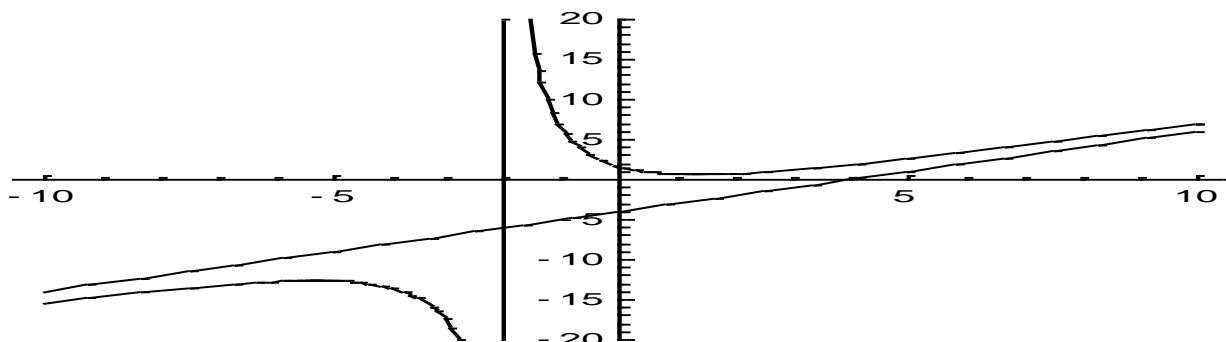
Найдем наклонные асимптоты.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} = 1.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 2x + 3 - x^2 - 2x}{x + 2} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x + 3}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = -4$$

Итого, прямая  $y = x - 4$  является наклонной асимптотой.



### 6.2.5 Общая схема исследования функции

1. Область определения функции, точки разрыва, вертикальные асимптоты.
2. Нули функции (точки пересечения графика с осями координат).
3. Четность и нечетность функции (симметрия графика).
4. Наклонные и горизонтальные асимптоты.
5. Интервалы возрастания и убывания функции, экстремум функции.
6. Интервалы выпуклости и вогнутости графика функции, точки перегиба.
7. Эскиз графика функции.

**Пример:** Провести полное исследование функции

$$y = \frac{x^2 + x - 5}{x - 2} \text{ и построить ее график.}$$

1.  $D(y): x \in (-\infty; 2) \cup (2; \infty)$ .

$x = 2$  - точка разрыва, следовательно  $x = 2$  - уравнение вертикальной асимптоты.

2. Точки пересечения

$C \quad OX: y = 0 \Rightarrow x^2 + x - 5 = 0$

$$D = 1 + 20 = 21$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} \\ y_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

$C \quad OY: \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{5}{2} \end{cases} \quad \text{итак: } A\left(\frac{-1 + \sqrt{21}}{2}; 0\right);$

$$B\left(\frac{-1 - \sqrt{21}}{2}; 0\right); C\left(0; \frac{5}{2}\right)$$

3.

$$y(-x) = \frac{(-x)^2 + (-x) - 5}{(-x) - 2} = \frac{x^2 - x - 5}{-x - 2},$$

т.к.  $y(-x) \neq y(x)$  — не является четной, т.к.  $y(-x) \neq -y(x)$  — не является нечетной, то функция ни четная, ни нечетная.

4. Найдем асимптоты графика функции, воспользовавшись уравнением  $y = kx + b$

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 5}{x^2 - 2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{2x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{2} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + x - 5}{x - 2} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 5 - x^2 + 2x}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 5}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{1} = 3$$

$y = x + 3$  - уравнение наклонной асимптоты.





5.

$$y' = \left( \frac{x^2 + x - 5}{x - 2} \right)' =$$

$$= \frac{(2x + 1)(x - 2) - (x^2 + x - 5) \cdot 1}{(x - 2)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 + x - 4x - 2 - x^2 - x + 5}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}$$

$y' = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0; \quad x_1 = 3; \quad x_2 = 1$  .  
 критические точки,  $y'$  не существует при  $x = 2$  .

<b>x</b>	$(-\infty; 1)$	1	$(1; 2)$	2	$(2; 3)$	3	$(3; \infty)$
<b><math>y'</math></b>	+	<b>0</b>	-	не сущ.	-	<b>0</b>	+
<b>y</b>		3		не сущ.		7	
		max				min	

$$y'(0) = 3 ; \quad y'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - 6 + 3 = -\frac{3}{4} \quad ;$$

$$y'\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{4} - 10 + 3 = -\frac{3}{4}$$

$$y'(4) = 16 - 16 + 3 = 3$$

$$y_{\max}(1) = \frac{1+1-5}{1-2} = \frac{-3}{-1} = 3$$

$$y_{\min}(3) = \frac{9+3-5}{3-2} = \frac{7}{1} = 7$$

6.

$$y'' = \left( \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} \right)' =$$

$$= \frac{(2x-4)(x-2)^2 - (x^2 - 4x + 3) 2(x-2)}{(x-2)^4} =$$

$$= \frac{\cancel{2x^2} - \cancel{4x} - \cancel{4x} + 8 - \cancel{2x^2} + \cancel{8x} - 6}{(x-2)^3} = \frac{2}{(x-2)^3}$$

$$y'' = 0, \text{ но } \frac{2}{(x-2)^3} \neq 0 \Rightarrow$$

$y''$  не сущ. в  $x = 2$  – кр. точка

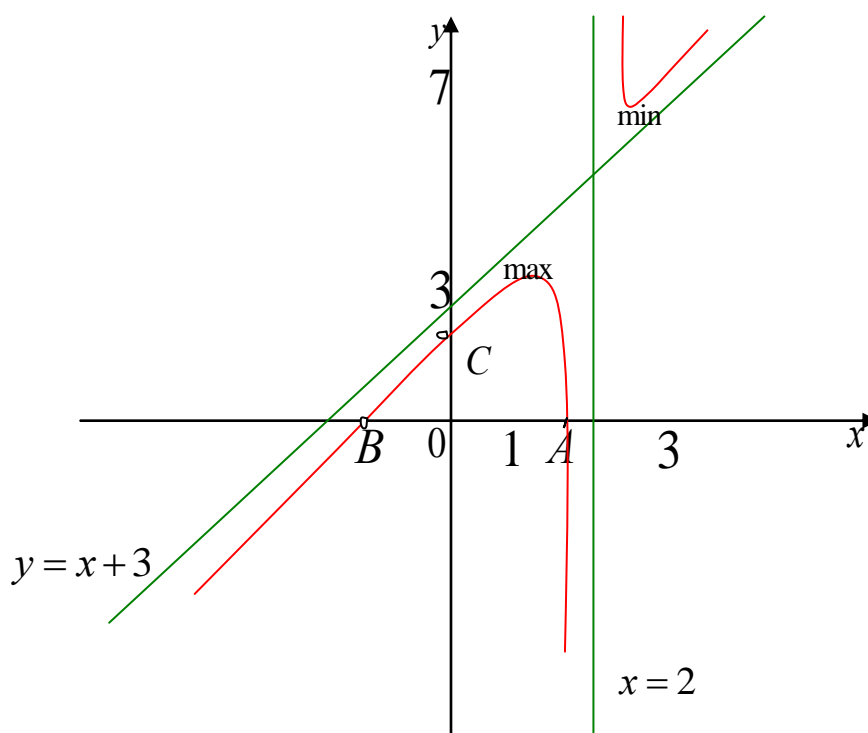
$x$	$(-\infty; 2)$	$2$	$(2; \infty)$
$y''$	-	не сущ.	+
$y$		не сущ.	
		перегиб	

$$y''(0) = -\frac{1}{4} ; \quad y''(3) = 2$$

7.

Построим график

функции:





## 6.2.6 Наименьшее и наибольшее значение функции $y = f(x)$ на отрезке

### Правило нахождения.

1) Находим критические точки, входящие в отрезок  $[a; b]$ .

2) Вычисляем значения функции в критических точках и на концах отрезка.

3) Из всех значений выбираем наименьшее и наибольшее.

**Пример:** Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $y = x^3 - 6x^2 + 9$  на  $[-1; 2]$ .

$$y' = 3x^2 - 12x \quad ; \quad y' = 0 \quad ;$$

1)  $3x^2 - 12x = 0$

$$3x(x - 4) = 0 \quad ; \quad x_1 = 0 - \text{кр. точка}$$

$$x_2 = 4 \notin [-1; 2] \quad .$$

2)  $y(0) = 9$

$$y(-1) = 2$$

$$y(2) = -7 \quad .$$

3).  $y(0) = 9$  -наибольшее значение

$y(2) = -7$  - наименьшее значение.

## §7 Применение дифференциала функции к приближенным вычислениям

Пусть задана функция  $y = f(x)$ .  
Воспользуемся приближенным равенством:

$$\Delta y \approx dy$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \quad (1)$$

$$dy = f'(x) \cdot dx \quad (2)$$

Сравнивая (1) и (2) выражения, получим:

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \cdot dx \Rightarrow$$

$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot dx$  - формула для  
приближенного вычисления значений  
функции.

Можно доказать, что абсолютная  
погрешность этой формулы не превышает

$$\Delta_{\text{абс. погрешн.}} \leq \frac{\max(y^{(n)})}{n!} \cdot \Delta x^n.$$

**Пример:** Вычислить  $\sqrt{101}$ .

$x = x_0 + \Delta x$  , где  
 Пусть  $y = \sqrt{x}$   $x_0 = 100$  ;  $\Delta x = 1$   $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow$   
 $\sqrt{100+1} \approx \sqrt{x_0} + y_{x_0}' \cdot \Delta x =$   
 $= \sqrt{100} + \frac{1}{2\sqrt{100}} \cdot 1 = 10 + \frac{1}{20} = 10,05$   
 $\sqrt{101} \approx 10,05$

## §8 Правило Лопиталя при вычислении пределов

Пусть заданы некоторые функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$ , дифференцируемые на некотором интервале  $(a;b)$ , а в точке  $x_0$  обращающиеся в ноль. Тогда имеет место равенство:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)} = \dots} \text{ - для}$$

раскрытия неопределенностей  $\left| \frac{0}{0} \right|$  и  $\left| \frac{\infty}{\infty} \right|$  -

**правило Лопиталя**

**Пример1:** Найти предел.

Как видно, при попытке непосредственного  
 вычисления предела получается

неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ .  $f'(x) = 2x + \frac{1}{x}$ ;  
 $g'(x) = e^x$ ;

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x + \frac{1}{x}}{e^x} = \frac{2 + 1}{e} = \frac{3}{e};$$

**Пример2:** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ .

$$f'(x) = e^x + e^{-x} - 2;$$

$$g'(x) = 1 - \cos x;$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \frac{1 + 1 - 2}{1 - 1} = \frac{0}{0}$  - опять получилась неопределенность. Применим правило Лопиталя еще раз.

$$f''(x) = e^x - e^{-x};$$

$$g''(x) = \sin x;$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}$  - применяем правило Лопиталя еще раз.

$$f'''(x) = e^x + e^{-x};$$

$$g'''(x) = \cos x;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2;$$